



TITLE:

グラフの被覆分解(グラフ理論とその応用)

AUTHOR(S):

安藤, 清; 江川, 嘉美; 水野, 弘文

CITATION:

安藤, 清 ...[et al]. グラフの被覆分解(グラフ理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1984, 534: 185-190

ISSUE DATE:

1984-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98639>

RIGHT:

グラフの被覆分解

日本医科大学	安藤 清
東京理科大学	江川 嘉美
電気通信大学	水野 弘文

序

G を単純グラフとし, \bar{G} をその補グラフとする。我々は先に G, \bar{G} がともに自明でないカルテシアン積に分解できるならば, G は $2K_2, C_4, Q_3, K_4 \times K_2, K_2 \times (K_2 + \bar{K}_2), K_3 \times K_3$ のいずれかであることを報告した。

ここでは カルテシアン積の一つの拡張としてグラフの被覆分解を導入し, G, \bar{G} ともに自明でない被覆分解をもつグラフを決定することを試みる。

1. 定義と例

ここでは単純グラフを考える。グラフ G の点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ であらわす。 $|G| = |V(G)|$, $\|G\| = |E(G)|$ とおく。 $V' \subset V(G)$ および $E' \subset E(G)$ で誘導される G の部分グラフをそれぞれ $G[V']$, $G[E']$ であらわす。 G において点 x に隣接する点の集合を x の近傍と呼び, $N(x; G)$ であらわす。

G, H を $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ なる2つのグラフとする。 $V(G)$ から $V(H)$ の上への写像 p は G の任意の辺 xy について $p(x) = p(y)$ または $p(x)p(y) \in E(H)$ となるとき, G から H への射影と呼ばれる。とくに G の任意の点 x の近傍 $N(x; G)$ への制限 $p|_{N(x; G)}$ が1対1写像であるとき射影 p は局所同相であるといわれる。

定義 1 グラフ G からグラフ H への局所同相な射影 p が存在するとき (G, p) を H 上の被覆という。または単に G は H 上の被覆であるという。また $u \in V(H)$ について $|p^{-1}(u)| = n$ であるとき G は H 上の n -被覆であるという。

G を H 上の n -被覆とし 射影 p に関する H の辺 uv の逆像を $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n\}$ とする。(ただし $p(x_i) = u, p(y_i) = v, 1 \leq i \leq n$)。 G から2辺 $x_1 y_1, x_2 y_2$ を除き、新たに2辺 $x_1 y_2, x_2 y_1$ を加える操作を“射影 p に関する辺交換”と呼ぶ。このとき G に射影 p に関する辺交換を施して得られるグラフを G' とすると (G', p) はまた H 上の n -被覆である。また H 上の任意の n -被覆 (G, p) は nH に p に関する辺交換を繰返し施すことによって得られる。

定義 2 グラフ G に対し、 $E(G)$ の分割 E' , E'' とグラフ H , F があって さらに以下の条件 (A), (B) を満たす $G[E']$ から H への射影 p と $G[E'']$ から F への射影 q が存在するとき、 G は (H, F) - 被覆分解可能であるという。

(A) $(G[E'], p)$, $(G[E''], q)$ はそれぞれ H , F 上の被覆である。

(B) 任意の $u \in V(H)$, $v \in V(F)$ に対し、 $p \mid q^{-1}(v)$, $q \mid p^{-1}(u)$ はともに 1 対 1 写像である。

$G = H \times F$ ならば G は (H, F) - 被覆分解可能である。定義より次の補題が得られる。

補題 1 グラフ G は (H, F) - 被覆分解可能であるとし、被覆分解を与える射影を p , q とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $|G| = |H| |F|$,

(2) $\|G\| = |H| \|F\| + |F| \|H\|$,

(3) H , F がともに連結ならば G も連結である。

(4) p または q に関する辺交換を施して得られるグラフはまた (H, F) - 被覆分解可能である。

とくに任意のグラフは (K_1, G) - 被覆分解可能であるが、これを G の自明な被覆分解と呼ぶ。

定義 3 G を (H, F) - 被覆分解可能なグラフとする。

$p: G[E'] \longrightarrow H$, $q: G[E''] \longrightarrow F$ を分解を与える射影とする。このとき 任意の点 $u \in V(H)$ について $p^{-1}(u) \cong F$ が成立するならば、この分解は F に関して単純であるといわれる。

F に関して単純な (H, F) - 被覆分解を略して 単純な (H, F) - 被覆分解あるいは単に 単純な被覆分解と呼ぶ。単純な被覆分解では $G[E''] \cong |H| F$ である。

補題 2 (三角形補題) 射影 $p: G[E'] \longrightarrow H$, $q: G[E''] \longrightarrow F$ が F に関して単純な G の被覆分解を与えるものとする。このとき G の任意の三角形 K_3 について $E(K_3) \subset E'$ または $E(K_3) \subset E''$ が成り立つ。

注意] 単純でない被覆分解では上の補題の結論は必ずしも成立しない。

G , \bar{G} とともに自明でない被覆分解可能なグラフの全体を \mathcal{G} であらわす。また、 G , \bar{G} とともに自明でない単純被覆分解可能なグラフ全体を \mathcal{G}' であ

らわす。

例 1 (グラフの被覆分解)

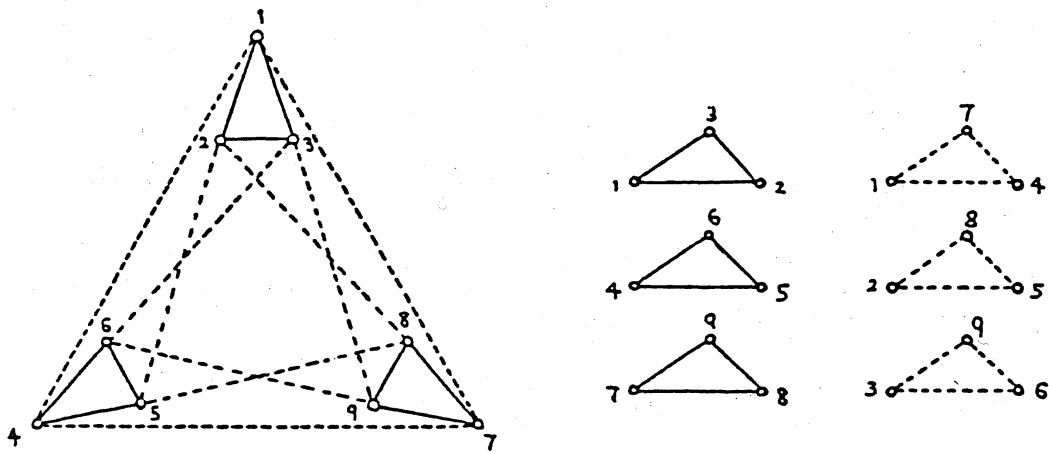


図 - 1 カルテシアン積

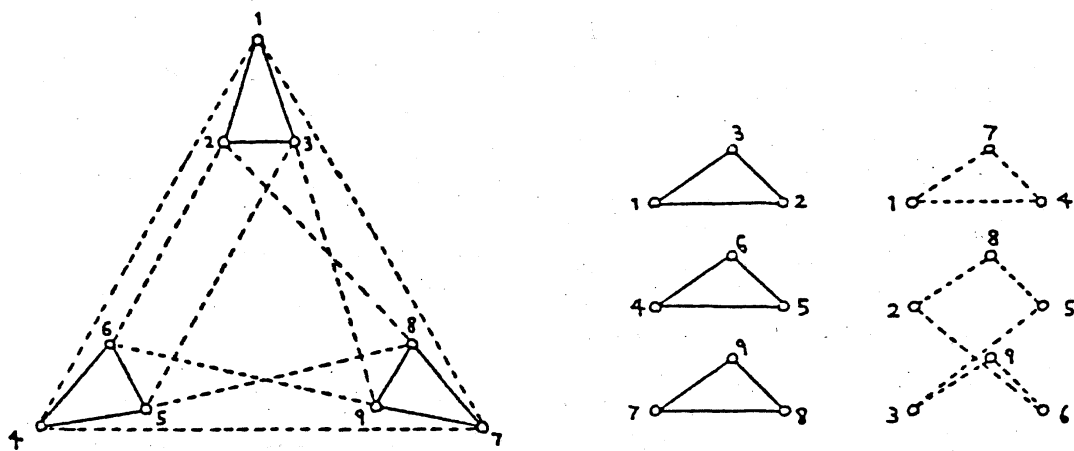


図 - 2 単純な被覆分解

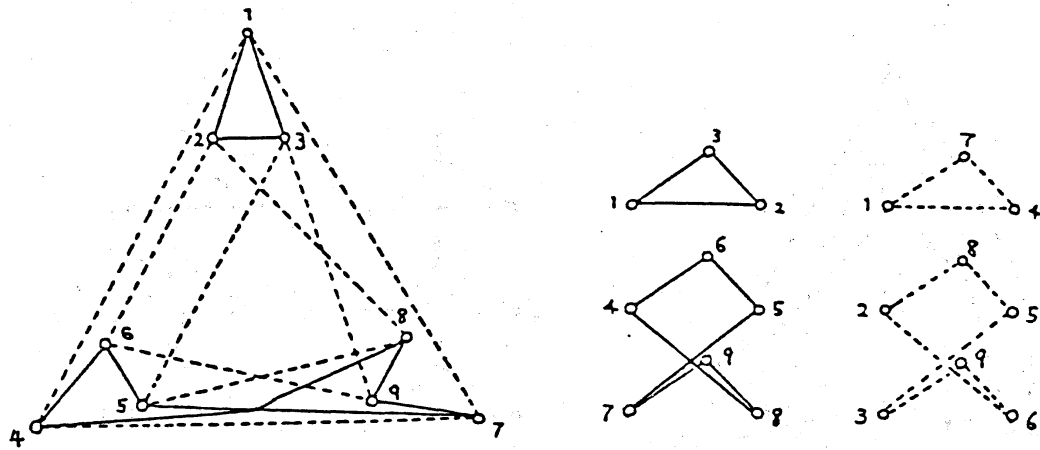


図-3 被覆分解

例 2

G のグラフの重要な系列を以下 定義する。

I を $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合とすると、 I に対してグラフ $D_n(I)$ を

$$V(D_n(I)) = \{x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

$$E(D_n(I)) = E(K_{2n}) - \{x_i, y_i \mid i \in I\}$$

で 定義する。

また $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $L \subset \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ に対してグラフ $C_n(I, L)$ を

$$V(C_n(I, L)) = \{x_{\varepsilon, i}, y_{\varepsilon, i} \mid \varepsilon = \pm 1, 1 \leq i \leq n\}$$

$$E(C_n(I, L)) = \{x_{1, i}, x_{-1, i}, y_{1, i}, y_{-1, i} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$\cup \{x_{\varepsilon, i}, y_{\varepsilon, i} \mid \varepsilon = \pm 1, i \notin I, 1 \leq i \leq n\}$$

$$\cup \{a_{\varepsilon, i}, b_{\varepsilon, j} \mid \varepsilon = \pm 1, (i, j) \in L\}$$

$$\cup \{a_{\varepsilon, i}, b_{-\varepsilon, j} \mid \varepsilon = \pm 1, (i, j) \notin L\}$$

(ただし a, b は x および y を動かすものとする。)

で定義する。

$G \cong D_n(I) \times K_2$, または $G \cong C_n(I, L)$ なるグラフ G の全体を \mathcal{E} であらわす。 \mathcal{E} に含まれるグラフの位数は 4 の倍数である。

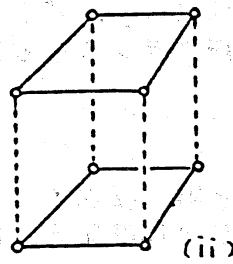
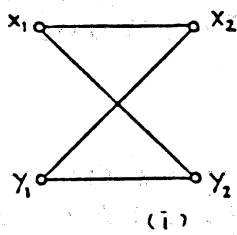


図-4 (i) $D_n(I)$; $I = \{1, 2\}$ (ii) $D_n(I) \times K_2$

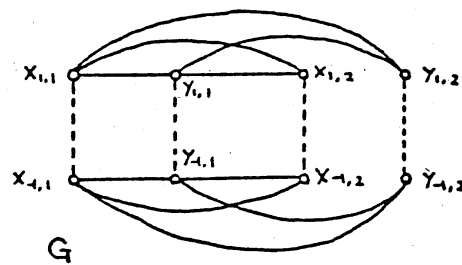
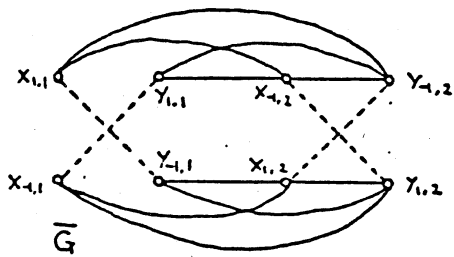


図-5 $C_n(I, L)$ の例 ; $G = K_2 \times (K_2 + \overline{K_2})$

2. \mathcal{G} および \mathcal{G}' の特徴付け

定理 1 G, \overline{G} ともに自明でない被覆分解可能なグラフであるとする。このとき

- (1) $|G|$ が偶数ならば, $|H| = |G|/2$ なるグラフ H が存在して, G, \overline{G} の被覆分解の少なくとも一方は (K_2, H) - 被覆分解である。
- (2) $|G|$ が奇数ならば, G, \overline{G} の被覆分解はともに (K_3, K_3) - 被覆分解である。

定理 2 G, \overline{G} がともに自明でない単純な被覆分解可能なグラフであるための必要充分条件は G, \overline{G} のいずれかが (1) 単純な (K_2, K_n) - 被覆分解可能なグラフ, (2) $K_3 \times K_3$, または (3) \mathcal{E} のグラフ であることである。

注意) G が単純な (K_2, K_n) - 被覆分解可能なグラフならば, その補グラフ \bar{G} は単純な (\bar{K}_2, K_n) - 被覆分解可能なグラフである。また, $K_3 \times K_3$ は自己補グラフであり, $G \in \mathcal{E}$ ならば $\bar{G} \in \mathcal{E}$ である。

文 献

- [1] 安藤 清、水野 弘文: Direct product decomposition of graphs, 日本数学会1983年度年会, 応用数学分科会アブストラクト 25-26 (1983)
- [2] K.Ando, H.Mizuno: Bidecomposable Six Graphs, to appear
- [3] K.Ando, Y.Egawa, H.Mizuno: Covering Decomposition of Graphs, pre-print